

# **Begriffsbildung im Mathematikunterricht der Sek I zum Thema Winkel**

**Christian Dohrmann, Ana Kuzle**

Der Winkelbegriff als elementarer Begriff der ebenen Geometrie und Raumgeometrie ist aufgrund vielfältiger Aspekte und Definitionen ein komplexer Lehr- & Lerngegenstand des Geometrieunterrichts. Sätze über Gleichheit, Summen und Differenzen von Winkeln, sowie der Winkel als Objekt-, Relations- und Maßbegriff sind für die gesamte (Schul-)Geometrie relevant. Der Winkelbegriff muss folglich im Mathematikunterricht systematische und ganzheitliche ausgebildet werden (KRAINER, 1989). Ergebnisse fachdidaktischer Forschung zum Thema innerhalb der letzten 30 Jahre stellen aufgrund nachweisbarer Fehlkonzepte und Fehlermuster die Bedeutung einer operativen Begriffsentwicklung heraus, bei der sowohl geeignete (digitale) Werkzeuge, als auch anschauliche Materialien und Darstellungsformen zum Einsatz kommen (u.a. KRAINER, 1989; MITCHELMORE & WHITE, 2000; BERRY III & WIGGINS, 2001). Weiterhin wird festgesetzt, dass bestimmte Fehlkonzepte mit der systematischen Begriffseinführung nach dem Grundschulübergang dauerhaft und resistent über die Schullaufbahn „erworben“ werden. Als Einflussfaktoren gelten hierbei mentale Operationen und Vorstellungen zu Winkelaspekten, die eng mit den vorhandenen Fehlkonzepten verknüpft sind. Konrad KRAINER (1989) stellt bereits den relevanten Bezug von Vorstellungen zu Begriffsaspekten bei Winkeln heraus: Winkel als „abgelenkte“ Gerade; Winkel als Ebenenteil; Winkel als Umlaufwinkel.

Der Artikel thematisiert die Analyse von Schulbüchern hinsichtlich verwendeter Repräsentationen und Darstellungsformen zum Winkel in der Sek I. Bezüge zur didaktischen Genese zum Winkelbegriff werden eingangs basierend auf der Arbeit von KRAINER (1989) hergestellt. Darüber hinaus werden erste Ergebnisse einer Untersuchung zu Winkelvorstellungen von Fünft- und Zehntklässlern vorgestellt und mit ausgewählten Forschungsbefunden kontrastiert. Die vorliegende Arbeit versteht sich als Annäherung an die didaktische Auseinandersetzung zur Begriffsbildung zum Winkel.

## **Winkel - ein vielfältiger Begriff**

Das Bedürfnis eindeutiger Begriffsdefinitionen ist seit der philosophischen Auseinandersetzung mit der Mathematik als Strukturgebilde der Welt erwachsen und bis heute ein zentraler Bestandteil der Schulmathematik. Die Notwendigkeit von Begriffsdefinitionen für die Entwicklung der theoretischen Fundierung der Geometrie skizziert KRAINER (1989, S.126ff) an zwei Zugängen, zum einen abbildungsgeometrisch in der Tra-

dition der Vertreter FELIX KLEIN und GUSTAVE CHOQUET, zum anderen kongruenzgeometrisch nach EUKLID und DAVID HILBERT. Beide Zugänge werden im Folgenden mit Bezug auf KRAINER zusammengefasst.

KLEIN entwickelt ein Axiomensystem, welches gänzlich ohne die Verwendung des Winkelbegriffes auskommt. Er führt den Winkel als Maß einer Drehbewegung ein, ohne ihn definitiv festzulegen. CHOQUET begründet die affine Struktur der Ebene ebenfalls ohne auf den Winkelbegriff zurückzugreifen. Winkel werden in seinen theoretischen Betrachtungen als Drehungen interpretiert. Sie gewährleisten die wesentliche Eigenschaft, Teilmengen der Ebene mit Hilfe bestimmter Operationen an anderer Stelle wieder zu fixieren. Dem Winkel und der Drehung liegt hier die gemeinsame Idee der formalen Beziehung zwischen zwei Richtungen zugrunde. Beim kongruenzgeometrischen Zugang nach EUKLID und HILBERT treten Winkel als formale Notwendigkeit auf, Beziehungen (Kongruenz) zwischen geometrischen Objekten innerhalb eines Axiomensystems beschreiben zu können.

In beiden Zugängen zur Geometrie werden unterschiedliche Winkelaspekte betont: Winkel als Drehung (nach CHOQUET), Winkel als Maß einer Drehbewegung (nach KLEIN), Winkel als Neigung (nach EUKLID) oder Winkel als Theorieelement zur Beschreibung von Beziehungen (nach HILBERT).

KRAINER arbeitet verschiedene Vorstellungen von Winkeln heraus und greift damit unterschiedliche Aspekte und Definitionen des Winkelbegriffs auf (Abbildung 1).

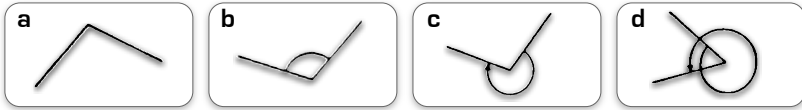


Abbildung 1: Winkelvorsstellungen (KRAINER, 1989, S.387)

- a) Winkel als „abgeknickte“ Gerade (ohne Kreisbogen)
- b) Winkel als Ebenenteil, der von zwei geraden Linien mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird (mit Kreisbogen oder Winkelfeld)
- c) Winkel als Ebenenteil, dessen Entstehung durch die Drehung eines Schenkels beschrieben werden kann (mit Kreisbogenpfeil oder orientiertem Winkelfeld)
- d) Winkel als Umlaufwinkel (mit Umdrehungspfeil)

Neben den vielfältigen Aspekten und Vorstellungen zu Winkeln treten darüber hinaus unterschiedliche Begriffsarten hervor:

- *Objektbegriff*: Der Winkel als Objektbegriff steht für diejenigen ebenen und räumlichen Objekte, die durch konkrete Darstellungen und Modelle repräsentiert werden. Betont wird hierbei der figurative (statische) Winkelaspekt.
- *Relationsbegriff*: Beim Vergleich und dem in Beziehung setzen von Winkeln mit geometrischen Objekten.
- *Maßbegriff*: Bei Betrachtungen von Winkelgrößen tritt der Winkel als Maßbegriff hervor.

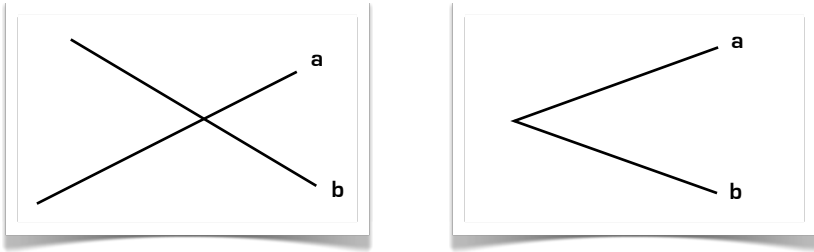
Es zeichnet sich an dieser Stelle bereits ein Bild eines multidimensionalen Begriffsfeldes ab, das je nach Bedürfnis und geometrischem Kontext vielfältige Zugänge und Definitionen zu Winkeln liefert. Unser Interesse richtet sich im Folgenden auf

Darstellungen und Repräsentationen in Schulbüchern der Klassenstufe 6. Es soll herausgearbeitet werden, inwieweit die oben dargestellten Aspekte und Definitionen aufgegriffen werden, um ein genaueres Bild der Begriffsausbildung zu erhalten, die in Schulbüchern vorgenommen wird.

### **Darstellungen und Repräsentationen zum Winkelbegriff in Schulbüchern zu Beginn der systematischen Begriffsausbildung**

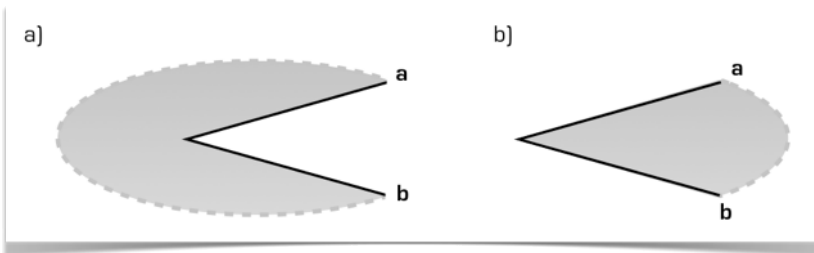
Das Thema Winkel ist kein zentrales Thema der Geometrie der Grundschule. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004) findet keine direkte Erwähnung statt. In Lehrplänen werden Kompetenzerwartungen nach Klasse 4 im Bereich „Raum und Form“ zum Schwerpunkt „Ebene Figuren“ formuliert: Schüler/innen können den rechten Winkel benennen und zur Beschreibung ebener Figuren verwenden. In Schulbüchern wird ausschließlich der rechte Winkel thematisiert – meist eingeführt über den Faltwinkel. Rechte Winkel sollen mit Hilfe des Faltwinkels in der Umwelt erkannt und mit dem Geodreieck gezeichnet werden. Die systematische Einführung erfolgt je nach Bundesland in Klasse 5/6. Die Schüler/Innen verwenden den Winkel zur Beschreibung ebener und räumlicher Figuren, sowie zum Schätzen und Zeichnen. Sie lernen verschiedene Winkelsätze kennen und nutzen Winkel beim direkten und indirekten Messen.

In den von uns untersuchten Schulbüchern (siehe Tabelle 1) finden sich überwiegend Definitionen und Darstellungen, die den Winkel als sich schneidendes Geraden- bzw. Halbgeradenpaar mit gemeinsamen Anfangspunkt aufgreifen (Abbildung 2).



**Abbildung 2:** Winkel als sich schneidendes Geradenpaar (l) bzw. Halbgeradenpaar (r).

Auffällig seltener sind Darstellungen und Definition mit Betonung des Winkelfeldes auszumachen (Elemente der Mathematik SI, 2012, S.56ff & Schnittpunkt Mathematik 6 NRW, S.8ff).



**Abbildung 3:** Winkel als Punktmenge

- a) „geordnet“: Der Winkel ist die Punktmenge, die überstrichen wird, wenn der Erstschenkel  $a$  gegen den Uhrzeigersinn in den Zweitschenkel  $b$  gedreht wird.
- b) „ungeordnet“: Der Winkel ist die Punktmenge, die überstrichen wird, wenn Gerade  $a$  auf kürzestem Weg in Gerade  $b$  gedreht wird.

In den analysierten Schulbüchern wird entweder der statische Winkelaspekt parallel zum dynamischen Aspekt aufgegriffen, oder ausschließlich auf den statischen Aspekt in Darstellungen und Operationen Bezug genommen.

**Tabelle 1:** Darstellungen und Operationen zu Winkeln in unterschiedlichen Schulbüchern der Klassenstufe 6

Schulbuch	Darstellung	Werkzeug	Operation
Einblicke Mathe- matik 6 NRW, 2007, S.15ff	- Strahlenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck - Theodolit	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch)
Pluspunkt Ma- thematik 6 NRW, 2006, S.56ff	- Strahlenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch) - Schätzen
Mathe live 6, 2009, S.32ff	- Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch)
Maßstab 6, 2005, S.59ff	- Strahlenpaar	- Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)
Mathematik Sekundo 6, 2010, S.56ff	- Strahlenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)
Mathematik Neue Wege SI Klasse 6, 2009, S.8ff	- Strahlenpaar - Halbgeradenpaar - Teil der Ebene - Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch) - Schätzen
Mathematik Heute 6, 2013, S.88ff	- Strahlenpaar - Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck - DGS	- Messen (statisch & dynamisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch) - Schätzen
Elemente der Mathematik SI, 2012, S.56ff	- Strahlenpaar - Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck - DGS	- Messen (statisch & dynamisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch) - Schätzen
Schnittpunkt Mathematik 6 NRW, 2006, S.8ff	- Winkelfeld	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)
Lambacher Schweizer 6 NRW, 2009, S.84ff	- Strahlenpaar - Halbgeradenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)

Bei der Einführung zum Messen und Zeichnen von Winkeln zeichnet sich ein ähnliches Bild ab. Das statische Messverfahren mit Hilfe des Geodreiecks („Anlegen und Abmessen“-Methode) wird in jedem von uns analysierten Schulbuch aufgegriffen, während die dynamische Methode („Drehwinkel“-Methode) zum Messen und Zeichnen von Winkeln nur in vereinzelt Büchern aufgeführt wird (siehe Tabelle 1).

Grundsätzlich gibt es zwei unterschiedliche Methoden, Winkel mit dem Geodreieck zu zeichnen und zu messen.

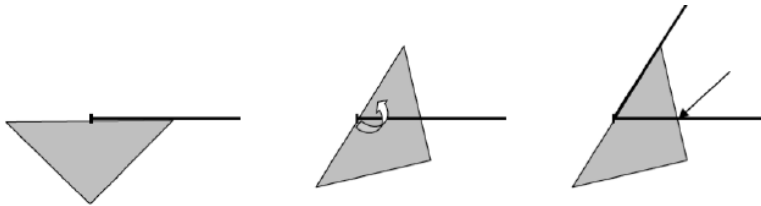


Abbildung 4: „Drehwinkelmethode“ (dynamisch)

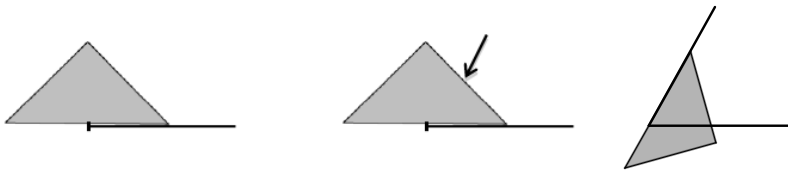


Abbildung 5: „Anlegen und Abmessen“-Methode (statisch)

Die „Drehwinkelmethode“ bringt bei jedem Vorgang die beiden Winkelaspekte Drehung und Winkelfeld (begrenzt durch die beiden Schenkel) zum Tragen, während die „Anlegen und Abmessen“-Methode überwiegend den statischen Aspekt (Winkel als Figur) betont.

- Zur „Drehwinkelmethode“: Diese erinnert an den Drehvorgang, der dem Entstehen von Winkeln zugrunde liegen kann. Weiterhin werden bei dieser Methode Fehler durch Verwechseln der beiden gegenläufigen Skalen auf dem Geodreieck entgegengewirkt. Nach ausgiebiger Einführungsphase kann die Drehung des Messgerätes wegfallen, so dass nur noch ein Arbeitsschritt benötigt wird. Nachteilig erweist sich die Methode bei der Verwendung von Halb- und Vollkreiswinkelmessern. Hierbei wird stets ein zusätzlicher Arbeitsschritt zur Markierung des

Winkels und zum Zeichnen des Schenkels mit Hilfe eines Lineals benötigt. Schwierigkeiten zeigen sich ebenfalls bei der Durchführung mit dem Geodreieck. Das Festhalten bzw. Fixieren des Scheitelpunktes bei der Drehung ist mit dem herkömmlichen Geodreieck ohne Möglichkeit zum Fixieren des Drehzentrums schwierig zu bewerkstelligen und kann zu Mess- und Zeichenfehlern führen.

- Zur „Anlegen und Abmessen“-Methode: Beim Zeichnen muss der vorgegebene Schenkel nicht verlängert werden. Beim Anlegen des Geodreiecks zum Zeichnen des zweiten Schenkels muss nicht darauf geachtet werden, dass die „0“ am Scheitel liegt. Nachteilig erweist sich, dass beim Zeichnen von Winkeln auf jeden Fall zwei Arbeitsschritte benötigt werden. Zudem besteht Verwechslungsgefahr der beiden gegenläufigen Skalen auf dem Geodreieck.

Wir halten fest, dass in den von uns analysierten Schulbüchern unterschiedliche Schwerpunktsetzungen hinsichtlich der systematischen Begriffseinführung mit Bezug zu statischen bzw. dynamischen Aspekten von Winkeln vorgenommen werden, wobei die Betonung der statischen Sichtweise beim Zeichnen und Messen überwiegt. Für die didaktische Diskussion in diesem Zusammenhang liefert die Schulbuchanalyse folgende Motivation für die Fortführung der vorliegenden Arbeit: Es ist zunächst zu klären, welche Winkelbegriffe für den Mathematikunterricht überhaupt benötigt werden und welche Bedeutungen die beiden dargestellten Aspekte für den Begriffsbildungsprozess in dieser Hinsicht besitzen.



## Untersuchung zu Schülervorstellungen von Winkeln – erste Ergebnisse

Jeweils drei Schüler/Innen einer 5. und 10. Klassenstufe wurden von uns zu ihrem Winkelverständnis befragt. Die vorgelegten Aufgaben umfassten operative Tätigkeiten (Vergleichen, Zeichnen, Messen, Schätzen), sowie Verständnisfragen zu Winkelarten und -größen. Bei den Schüler/innen der 5. Klasse fand noch keine systematische Ausbildung des Winkelbegriffs im Unterricht statt. Vorerfahrungen und Vorwissen basieren auf den Grundschulhalten zum rechten Winkel.

Ziel der Untersuchung war zum einen herauszustellen, inwieweit die Schüler/innen unterschiedliche Winkelaspekte und Vorstellungen in ihr Begriffsverständnis integrieren. Zum anderen interessierte uns, ob spezifische Fehlermuster erkennbar sind und ob sich Zusammenhänge zu den identifizierten Vorstellungen herstellen lassen.

1. Zeige mir einen Winkel (in der Luft) und nimm' dafür deine Finger/Hände/Arme zur Hilfe!



Abbildung 6: Schüler/Innen der 5. Klasse



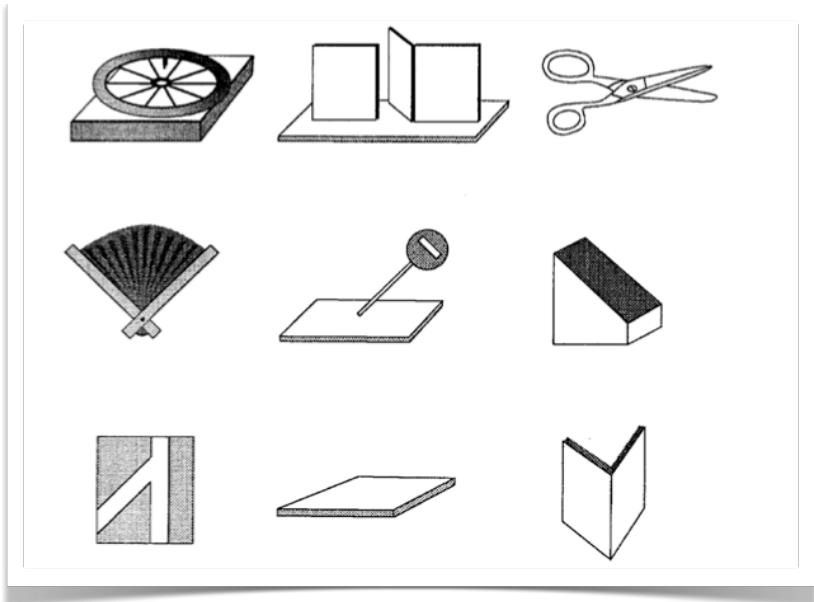
Abbildung 7: Schüler/Innen der 10. Klasse

Bei dieser Aufgabe konnte beobachtet werden, dass alle Schüler/Innen nach eigener Aussage einen rechten Winkel mit Hilfe ihrer Arme andeuten.

2. Erkläre mir: Was ist ein Winkel? Was verstehst du darunter?

Als häufigste Erklärung wurde hier sowohl bei Schüler/innen der 5. als auch der 10. Jahrgangsstufe das „*Aufeinanderstoßen zweier Kanten*“ genannt. Besonders der figurative Aspekt des Winkels tritt bei den Antworten hervor. Die Schüler/innen identifizieren das Vorhandensein von Schenkeln und Scheitelpunkt als Winkel. Noch deutlicher wird dies an der folgenden Aufgabe, bei der Bilder mit unterschiedlichen Winkelsituationen vorgelegt wurden und die Schüler/innen darin Winkel identifizieren und beschreiben sollten.

3. Zeige mir, auf welchen Bildern du Winkel erkennst und beschreibe, was du siehst. In welchen Situationen kann der Winkel verändert werden? Was passiert dabei?



**Abbildung 8:** Winkelsituationen (MITCHELMORE & WHITE, 2000)

Alle Schüler/innen haben zunächst bevorzugt rechte Winkel identifiziert. Auffällig waren Einschätzungen zur Scheren-Situation. Nur eine Schülerin der 5. Jahrgangsstufe war in der Lage, die Klingen der Schere als Winkel zu interpretieren. Jedoch zeigte sie sich unsicher, da die Klingen nach ihrer Aussage keinen rechten Winkel bilden. Dieselbe Schülerin identifizierte in der Fächer-Situation vier rechte Winkel um den Fächerscheitel. Schwierigkeiten hatte sie bei der Beantwortung der Frage, wie sich die von ihr identifizierten Winkel verändern, wenn der Fächer weiter geschlossen bzw. geöffnet wird. Es überwiegt die rein statische Beurteilung der Situation. MITCHELMORE & WHITE (2000, S.210) beobachteten in ihrer Studie, dass weniger als 10% der untersuchten Schüler (4. Jahrgangsstufe) die Rotation bzw. Drehung als Beispiel für Winkelsituationen identifizieren können.

Unsere Untersuchung zu Winkelvorstellungen bei Fünft- und Zehntklässlern bestätigen außerdem die Beobachtungen von KRAINER (1989) hinsichtlich der folgenden Fehlvorstellungen und Winkelinterpretationen:

- Vergleiche von Winkeln erfolgen über Vergleiche der Schenkellängen.
- Winkel werden vorrangig als „rechte Winkel“ interpretiert.
- Rotation bzw. Drehung wird nicht als Winkelaspekt wahrgenommen bzw. interpretiert.
- Winkel werden vorrangig als Figur, bestehend aus zwei aneinanderstoßenden Kanten bzw. Strecken gedeutet.

Da diese Muster ebenfalls bei den untersuchten Schüler/inne/n der 10. Jahrgangsstufe gefunden wurden, liegt die Vermutung nahe, dass Fehlkonzepte, wie der Vergleich von Winkeln anhand von Schenkellängen auch über einen größeren Zeitraum (Klasse 5 bis 10) relativ stabil sind. MITCHELMORE & WHITE (2000, S.210) bestätigen diesen Effekt in einer Untersuchung zum Winkelverständnis von Erwachsenen.

### **Ausblick**

KRAINER (1989, S.222-284) untersuchte Ende der 1980-er Jahre typische Schülerfehler beim Operieren und Argumentieren mit Winkeln und entwickelte ein Unterrichtskonzept zur Begegnung dieser Fehler. Um die Aspektvielfalt des Winkelbegriffs aufzuzeigen und für Schüler/innen fassbar zu machen, müssen nach KRAINER vielfältige anschauliche Zugänge angeboten werden. Einblicke in Schulbücher haben gezeigt, dass die systematische Begriffseinführung mit unterschiedlichen

Schwerpunktsetzungen bzgl. statischer und dynamischer Winkelaspekte einhergeht. Darüber hinaus deuten erste Ergebnisse aktueller Forschung zu Schülervorstellungen von Winkeln darauf hin, dass bestimmte Fehlermuster und Vorstellungen relativ stabil sind. Für die weitere didaktische Arbeit ist daher zunächst herauszuarbeiten, welche Bedeutung die beiden dargestellten Winkelaspekte für die Ausbildung des Winkelverständnisses besitzen und welche Winkelbegriffe und Vorstellungen für den Mathematikunterricht notwendig sind, um den beobachteten Fehlermustern zu begegnen.

## Literatur

- Berry III, R. Q., & Wiggins, J. (2001). Measurement in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(3), 154–156.
- Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes*. Frankfurt a.M.: Peter Lang.
- Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Jahrgangsstufe 4 (Primarstufe)*. Bonn: KMK.
- Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209–238.

### *Schulbücher*

- Einblicke Mathematik 6 NRW. (2007). Schüler-Arbeitsheft. Klett.
- Elemente der Mathematik SI NRW. (2012). Schülerband 6. Schroedel.
- Lambacher Schweizer. (2009). Ausgabe Nordrhein-Westfalen, Schülerbuch 6. Schuljahr. Klett.
- Mathematik 6 (2005). Ausgabe für Realschulen in Nordrhein-Westfalen, Bremen, Hamburg und Schleswig-Holstein. Schroedel.
- Mathematik Heute. (2013). Ausgabe Klasse 6. Schroedel.
- Mathe live. (2009). Schülerbuch 6. Schuljahr. Klett.
- Mathematik Neue Wege SI. (2009). Ausgabe Klasse 6. Schroedel
- Mathematik Sekundo 6 (2010). Ausgabe für differenzierende Schulformen. Schroedel.
- Pluspunkt Mathematik 6 NRW. (2006). Hauptschule Klasse 6. Cornelsen
- Schnittpunkt Mathematik NRW. (2006). Klett

Adresse des Autors:

Dipl.-Päd. Christian Dohrmann

Institut für Mathematik (Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik)

Martin-Luther-Universität

Herrenstraße 20

06108 Halle (Saale)

[christian.dohrmann@mathematik.uni-halle.de](mailto:christian.dohrmann@mathematik.uni-halle.de)

Adresse der Co-Autorin:

Dr. Ana Kuzle

Institut für Mathematik (Fachgruppe Mathematikdidaktik)

Universität Paderborn

Warburger Str. 100

33098 Paderborn

[akuzle@math.uni-paderborn.de](mailto:akuzle@math.uni-paderborn.de)